



TITLE:

等質確率場に関する2,3の話題 (多重マルコフ性と予測理論への応用)

AUTHOR(S):

麻生, 泰弘

CITATION:

麻生, 泰弘. 等質確率場に関する2,3の話題 (多重マルコフ性と予測理論への応用). 数理解析研究所講究録 1972, 151: 177-195

ISSUE DATE:

1972-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106793>

RIGHT:

等質確率場に関する 2, 3 の話題

駒根大 文理 麻生泰弘

先冬に行われた, “多重マルコフ性と予測理論への応用”
に於て, 筆者は E. WONG (1969) の紹介を行った。
この論文に於て, E. WONG (1969) の紹介及び問題
点の指摘, (2) U. D. PÖPPÖV (1968) による線
形外推問題の結果の振張を述べ, 簡単な文献表を記す。

(2) に関する, 英文原稿 “On a Linear Extrapolation
Problem of Some Homogeneous Random Fields” を参照され
たい。

§1. E. WONG (1969) の紹介

E. WONG (1969), “HOMOGENEOUS
GAUSS-MARKOV RANDOM FIELDS”
, Ann. Math. Stat., 40, pp. 1625-1634 を紹介す
る。

この論文の構成は、2. i" Second-order properties を扱い、
 3. i" Homogeneous Gauss-Markov Fields を特徴づける (定理 1)、
 4. i" Generalized Homogeneous Gauss-Markov Fields
 を扱う (定理 2)。以下、順次、紹介する。

(Ω, \mathcal{C}, P) : a fixed probability space

$\{x(\omega; z), \omega \in \Omega, z \in V_n\}$: n 次元パラメータ空間 V_n をもつ

Gaussian random field

以下、 V_n は (a) Euclid 空間 E^n , あるいは
 rank 1 なる定曲率対称空間 (b) 球面 S^n 及び (c) 実双
 曲空間 H^n である。

$GL(V_n)$: 距離を保つ V_n の運動の full linear group

Def: 任意の集合 $A = \{z_i\} \subset V_n$ に対し、

$\{x(z_i), z_i \in A\}$ と $\{x(gz_i), z_i \in A\}$ とが $g \in GL(V_n)$

のとき、同一分布を有するとき、確率場 $\{x(z), z \in V_n\}$ は
 等質 (homogeneous) であるという。

この論文は扱うマルコフ性は次の様に理解する。すなわち
 , ∂D を含む次元 $n-1$ なる V_n の曲面とし、 V_n を
 有界領域 D^- と、領域 D^+ とに分けるものとする。 $\{x(z), z \in \partial D\}$
 が与えられたとき、 $\{x(z), z \in D^-\}$ と $\{x(z), z \in D^+\}$ とが

独立ならば、確率場 $\{X(z), z \in V_n\}$ はマルコフ性をもつという。

以下、確率場 $\{X(z), z \in V_n\}$ を 2 次元平均連続な Gaussian field φ は homogeneous とする。平均値関数を 0 とする。また、相関関数を $R(d(z, z'))$, $d(z, z')$ は $z, z' \in V_n$ の距離, と記す。相関関数 $R(d(z, z'))$ は正値定符号である。

$\Delta(V_n)$: the Laplace-Beltrami operator
metric を

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{k=i+1}^{n-1} \sin^2 \varphi_k \right) dq_i^2$$

と表わすとき,

$$\Delta(V_n) = \left\{ g^{n-1}(r) \right\}^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[g^{n-1}(r) \frac{\partial}{\partial r} \right] + (g^2(r))^{-1} \Delta(S^{n-1}),$$

$$\Delta_0(V_n) \equiv \left\{ g^{n-1}(r) \right\}^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[g^{n-1}(r) \frac{\partial}{\partial r} \right].$$

$\psi(0) = 1$, $\Delta_0(V_n)\psi = \lambda\psi$ なる関数 ψ は, V_n 上の (zonal) spherical function である。(正値定符号)

\mathcal{L} : $\int g^{n-1}(r) |f(r)| dr < +\infty$ なる複素数値関数の
集合

\mathcal{M} : すべての spherical function の集合

\mathcal{M} に次のような最弱位相を与える;

すなわち, $f \in L$ の Fourier 変換

$$\hat{f}(\psi) = \int \psi(r) f(r) g^{n-1}(r) dr, \quad \psi \in \mathcal{M}$$

が連続となる最弱位相を与える。このとき, Naimark, Normed Rings, p. 426 に於て,

$$R(r) = \int_{\mathcal{M}} \psi(r) \sigma(d\psi),$$

$\sigma(d\psi)$ は \mathcal{M} 上の finite Borel 測度。

$\Lambda: \Delta_0(\mathbb{R}^n)$ の固有値の集合

Λ の λ に対応する spherical function を $\psi(\lambda, r)$ と書くとき,

$$R(r) = \int_{\Lambda} \psi(\lambda, r) \bar{\pi}(d\lambda),$$

$\bar{\pi} = \bar{\pi}(d\lambda)$ は Λ 上の finite Borel 測度。

spherical function ψ は, 具体的に 15 次のように与えられる。

(1) E^n のとき;

$$\psi(\lambda, r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\nu r)}{\left(\frac{\nu r}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}, \quad \lambda = -\nu^2, \quad 0 \leq \nu < +\infty$$

(2) S^n のとき;

$$\psi(\lambda, r) = \frac{\Gamma(n-1) k!}{\Gamma(n+k-1)} C_k^{\frac{n-1}{2}}(\cos(r)),$$

$$\lambda = -k(k+n-1), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(3) H^n のとき;

$$\psi(\lambda, r) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\operatorname{sh}^{\frac{n-2}{2}}(r)} \rho_{-\sigma-\frac{n}{2}}^{\frac{2-n}{2}}(\operatorname{ch}(r)),$$

$$\sigma = -\frac{n-1}{2} + \sqrt{1} \rho \ (\rho \neq 0) \text{ (fundamental series) 及 } \nu'' \in (-n+1, 0) \text{ (complementary series) } \nu'',$$

$$\lambda = \sigma(\sigma + n - 1).$$

注意1: E. Wong, A. M. Yaglom (1961) によれば, H^n の場合の complementary series が存在しない。

注意2: S^n に扱う空間の場合には, Laplace-Beltrami 作用素が一意的に定まり, 従って spherical function も上述の要請により完全に定まる。

$L^2(S^{n-1})$: S^{n-1} 上の一様な測度に関する L^2 乗可積分関数空間の基底

$m=0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$\Delta(S^{n-1})h = -m(m+n-2)h$$

の解をなす空間 ($GL(S^{n-1})$ 不変) を Z_m とし, $\dim(Z_m) = d_m$ とおく。 Z_m の基底, 実数値関数で正規直交なるものをとり $\{h_{m\ell}, 1 \leq \ell \leq d_m\}$ とおく。

これをを用いて, 我々は次の展開式をうる;

$$(1) \quad \psi(\lambda, d(z, z')) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_m} h_{m,l}(q) h_{m,l}(q') \psi_m(\lambda, v) \psi_m(\lambda, v'),$$

::: 1,

$$[\Delta_0(V_n) - \{q^2(v)\}^{-1} \{m(m+n-2)\}] \psi_m = \lambda \psi_m.$$

以上第2節の内容である。

(1) を用いて,

$$(2) \quad R(d(z, z')) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_m} h_{m,l}(q) h_{m,l}(q') \int_{\Lambda} \psi_m(\lambda, v) \psi_m(\lambda, v') d\tilde{F}(\lambda).$$

いま, $\{x_{m,l}(v)\}$ を独立な 1 次元 Gauss 過程とする。又

より,

$$\mathbb{E} x_{m,l}(v) x_{p,k}(v') = \delta_{mp} \delta_{lk} \int_{\Lambda} \psi_m(\lambda, v) \psi_m(\lambda, v') d\tilde{F}(\lambda).$$

$$(3) \quad x(q, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_m} h_{m,l}(q) x_{m,l}(v).$$

$$x_{m,l}(v) = \int x(q, v) h_{m,l}(q) dv(q),$$

$S^{n-1} :: 1 dv(q)$ は S^{n-1} 上の normalized

Haar measure.

Lemma 1:

$x(z)$, $z=(v, \omega)$ を等質な Gauss-Markov field とする。

$$x_{m2}(v) \equiv \int_{S^{n-1}} x(z) h_{m2}(\omega) dS(\omega)$$

↙ $\{x_{m2}(v)\}$ は、独立な 1 次元 Gauss-Markov 過程である。

$E x_{m2}(v) x_{m2}(v') = f_m(\max(v, v')) g_m(\min(v, v'))$
 を満たす関数 f_m, g_m が存在する。

Theorem 1:

$\{x(z), z \in T_n\}$ が 2 次元平均連続な homogeneous Gaussian field とする。

↙ $\{x(z), z \in T_n\}$ が Markovian であるための必要条件は、

$$(4) \quad R(d(z, z')) = C \psi(d(z, z')),$$

ここに $C = R(0)$ であり, ψ は T_n 上の
 spherical function,
 が存在するとしてある。

注意: (4) を満たす nontrivial な Markovian

field の存在の検討が残っている。事実, $V_n = \mathbb{R}^n$, ∂D を半径 r , 中心は原点なる球面とすると, ∂D 上の値に δ 1, すべての $z \in V_n$ どの値が確率 1 で定まってしまう。

以下 3 節の内容である。

以下に紹介する 4 節の内容は検討している。

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: 急減少な C^∞ -実数値関数の Schwartz 空間

\mathcal{H} : 平均 0 なる実 Gaussian 確率変数のヒルベルト空間

$X : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$ cont. linear map を real zero-mean Gaussian generalized Random field とする。

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (isometry) に対し, z ,

$$(T_g f)(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}z), \quad f \in \mathcal{S}.$$

Def. : $\forall g \in GL(\mathbb{R}^n)$ に対し, z ,

$$B(f_1, f_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} X(f_1) X(f_2) = \mathbb{E} X(T_g f_1) X(T_g f_2), \\ f_1, f_2 \in \mathcal{S}$$

のとき, X は homogeneous とする。 B は X の covariance bilinear form とする。

- bilinear f'nal B on $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$, homogeneous Gaussian generalized random field X の covariance f'nal γ があるための必要條件は,

$$(5) \quad B(f_1, f_2) = \int_0^\infty \sum_{m, l} \hat{f}_{m, l}^{(1)}(\lambda) \hat{f}_{m, l}^{(2)}(\lambda) d\bar{F}(\lambda),$$

\bar{F} は $(0, \infty)$ 上のゆるぎある非減少関数であり

$$(6) \quad \hat{f}_{m, l}(\lambda) = \int_{S^{n-1}} d\nu(q) \int_0^\infty r^{n-1} dr f(r, q) \psi_m(-\lambda, r) h_{m, l}(q)$$

$, m=0, 1, 2, \dots, 1 \leq l \leq d_m$

をみたす γ である。

∂D : a smooth $n-1$ closed surface in R^n

$d\sigma$: the differential surface area on ∂D

$f \in L^2(\partial D, d\sigma) \iff \hat{f} \in \gamma$,

$$\hat{f}_{m, l}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial D} f(x) \psi_m(-\lambda, r(x)) h_{m, l}(q(x)) d\sigma,$$

$$\tilde{f}(q, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m, l} h_{m, l}(q) \hat{f}_{m, l}(\lambda).$$

また,

$$\hat{f}(q, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m, l} \hat{f}_{m, l}(\lambda) h_{m, l}(q).$$

いま, $f \in \mathcal{L}^2(\partial D, d\sigma)$ のとき $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(d\tilde{\mu}, d\sigma)$ なる X に対応し,

$$\begin{aligned} X_{\partial D}(f) &\equiv \sum_{m,l} \int_0^\infty \tilde{f}_{ml}(\lambda) \hat{x}_{ml}(d\lambda), \\ &:: \hat{x}_{ml}(d\lambda) \text{ is,} \\ X(f) &= \sum_{m,l} \int_0^\infty \hat{f}_{ml}(\lambda) \hat{x}_{ml}(d\lambda) \\ &\text{である.} \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(\partial D)$: the closed linear manifold generated by
 $\{X_{\partial D}(f), f \in \mathcal{L}^2(\partial D, d\sigma)\}$.

$P_{\partial D} \mathcal{H}(\partial D')$: $\mathcal{H}(\partial D)$ への射影 $P_{\partial D}$ による $\mathcal{H}(\partial D')$ の像

Def.: 任意の $\partial D_1 \subset \partial D \subset \partial D_2$ に対し,

$\mathcal{H}(\partial D_2) - P_{\partial D} \mathcal{H}(\partial D_2)$ と $\mathcal{H}(\partial D_1)$ とは直交する
 とき, X は Markovian であるといふ。

Theorem 2:

$\{X(f), f \in \mathcal{S}\}$: homogeneous Gaussian generalized
 random field on \mathbb{R}^n , with spectral
 distribution $\bar{\Gamma}$

↙ X が Markovian であるための必要十分条件は,

$$(7) \quad \int_0^\infty \psi_0(-\lambda, r) \bar{\Gamma}(d\lambda) = R(r), \quad r > 0$$

\mathcal{R} ,

(8) $\{T^{n-1}\}^{-1} \frac{d}{dv} \left[r^{n-1} \frac{d}{dv} \right] R = \alpha R$, α : 正定数
 を持たず $(0, \infty)$ 上の 2 回微分可能な関数を定義する
 ことである。

方程式 (8) の解は,

$$(a) \quad R(v) = C_1 J_{\frac{n-2}{2}}(v_0 v) / (v_0 v)^{\frac{n-2}{2}}$$

及び

$$(b) \quad R(v) = C_2 K_{\frac{n-2}{2}}(v_0 v) / (v_0 v)^{\frac{n-2}{2}}$$

であり, (a) は $\lambda = v_0^2$ の j jump するスペクトル測度 $\bar{\mu}$ に対応し, (b) は

$$\bar{\mu}(dv^2) = \frac{C_2}{v_0^n} \frac{v^{n-1} dv}{1 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^2}$$

に対応する。(b) のとき, $n=1$ ならば,

$$R(r) = \frac{1}{2} \pi A e^{-v_0 |r|}$$

となり, これは Ornstein - Uhlenbeck process の相関関数

注意4: Wong は, S^n を基底 T_k 2 に相当する結果を得
 ているが, H^n の場合は未解決と述べている。

注意5: 確率場の多数 Markov 性に関する議論, 2 行, 2 行

注意6: 対称空間の rank > 1 の場合は, この論文の論
 法は適用困難と思われる。

On a Linear Extrapolation Problem Of Some Homogeneous Random Fields

Yasuhiro Asoo (Shimane Univ.)

§0. Introduction and Summary

Let V be the d -dimensional Euclidean space or d -dimensional sphere. Our random field $(X(\omega; z), z \in V)$ has the mean function 0 and the covariance function $R(z, z')$, and it belongs to the class $L^2(\Omega)$. We call it the homogeneous random field whenever $R(gz, gz') = R(z, z')$ for any $g \in GL(V)$. In this case, the covariance function is of the form $R(\rho(z, z'))$, where $\rho(z, z')$ is a distance between z and z' . Moreover, we assume that the random field $X(z)$ is continuous in quadratic mean, then the covariance function $R(\rho(z, z'))$ is a positive definite function. As well known, the positive definite function has the spectral representation with spherical functions. In our case, it takes the following forms;

for $V = E^d$,

$$R(\rho(z, z')) = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{d}{2}-1}(\rho \nu)}{(\rho \nu)^{\frac{d}{2}-1}} dF(\nu),$$

, where $R(0) = F(+\infty) < +\infty$,

(1)

for $V = S^d$,

$$R(\rho(z, z')) = \Gamma(d-1) \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(d-1)} \frac{C_{\nu}^{d-1}(\rho)}{C_{\nu}^{d-1}(1)} w(\nu),$$

, where $w(\nu) \geq 0$ and $R(0) = \sum_{\nu=0}^\infty w(\nu)$

We consider the following extrapolation problem; our data is observations on n concentric spheres with center at coordinate origin, and using these observations, we will extrapolate any one point outside of these regions. Let an extrapolated value be $\hat{X}(z)$; our extrapolation error is measured by

$$\delta^2(z) = E(X(z) - \hat{X}(z))^2. \quad (2)$$

Our extrapolator $\hat{X}(z)$ is of the form, when we denote a point z by coordinate (θ, ϕ) , $\theta \in S^{d-1}$ and $0 \leq \phi < +\infty$ ($V = E^d$), $0 \leq \phi \leq \pi$ ($V = S^d$),

$$\hat{X}(z) = \sum_{i=1}^n \int_{S^{d-1}} c^{(i)}(z; \vartheta) X(\vartheta; \theta_i) dv(\vartheta), \quad (3)$$

, where $dv(\vartheta)$ is the normalized Haar measure on S^{d-1} .

We will determine coefficients $c^{(i)}(z; \vartheta)$ ($1 \leq i \leq n$) to minimize the error $\delta^2(z)$ and evaluate the minimum value of $\delta^2(z)$. We assume that these coefficients belong to the class $L^2(S^{d-1})$. In the following, we treat these problems and in particular, for the case of $n = 1$ and origin, we will give an explicit evaluation. U.D. Popov (1968) treated the same problem for $V = E^2$.

§1. Euclidean space

In this case, our coefficients $c^{(i)}(z, \vartheta)$ have the Fourier expansion

$$c^{(i)}(z; \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_K \hat{c}^{(i)}(z; K) H_K^{\ell}(\vartheta), \quad (4)$$

, where $\vartheta = (\vartheta^{(d-1)}, \dots, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(1)})$,

$0 \leq \vartheta^{(1)} < 2\pi$, $0 \leq \vartheta^{(j)} \leq \pi$ ($j \neq 1$) and $H_K^{\ell}(\vartheta)$

($\ell = 0, 1, 2, \dots$; $K = (k_1, \dots, k_{d-2})$ such

that $k_0 = \ell \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{d-2} \geq 0$) are the

complete orthonormal system of $L^2(S^{d-1})$.

For fixed $z_j \in E$, a set of observation points, from (3) we have

$$R(\rho(z, z_j)) = \sum_{i=1}^n \int_{S^{d-1}} c^{(i)}(z; \vartheta) R(\rho(z_i, z_j)) dv(\vartheta). \quad (5)$$

Putting $z_i = (\theta_i, \vartheta_i)$, $z_j = (\theta_j, \vartheta_j)$, we get

$$R(\rho(z_i, z_j)) = r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_L (-1)^{\ell_{d-2}} a_{\ell}^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \overline{H_L^{\ell}(\vartheta_i)} H_L^{\ell}(\vartheta_j) \quad (6)$$

, where $a_{\ell}^{(d)}(\theta_i, \theta_j) = \int_0^{\pi} \frac{J_{\ell}(\rho_i \nu) J_{\ell}(\rho_j \nu)}{(\nu \rho_i)^{\ell} (\nu \rho_j)^{\ell}} dF(\nu)$.

Substituting (4) and (6) in (5), we get

$$R(\rho(z, z_j)) = r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_L (-1)^{\ell_{d-2}} \sum_{i=1}^n a_{\ell}^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \hat{c}^{(i)}(z; L) H_L^{\ell}(\vartheta_j)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L \gamma_j^{(d)}(z; l, L) H_L^l(q_j), \quad (7)$$

, where $\gamma_j^{(d)}(z; l, L) = P^{(d)}(\frac{1}{2})(-1)^{l_{0-2}} \sum_{i=1}^n a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \cdot \hat{c}^{(i)}(z; L).$

From the expression (7), we can determine coefficients $\gamma_j^{(d)}(z; l, L)$ uniquely and the matrix $A_l^{(d)} = (a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j))$ is a nonnegative definite symmetric matrix, so that whenever $\det(A_l^{(d)}) \neq 0$, we can determine coefficients $c^{(i)}(z, q)$ uniquely. To evaluate the error $\delta_{\Pi}^2(z)$, we need an evaluation of $\|\hat{X}(z)\|^2 = E(\hat{X}(z))^2$. While from (3) and (5), using (7), we get

$$\begin{aligned} \|\hat{X}(z)\|^2 &= P^{(d)}(\frac{1}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L (-1)^{l_{d-2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \overline{\hat{c}^{(i)}(z; L)} \hat{c}^{(j)}(z; L) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L \sum_{i=1}^n \hat{c}^{(i)}(z; L) \gamma_i^{(d)}(z; l, L) \end{aligned} \quad (8)$$

In particular, when $n = 1$, we have

$$\delta_1^2(z) = F(+\infty) - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L (-1)^{l_{d-2}} P^{(d)}(\frac{d}{2}) \frac{[a_l^{(d)}(\theta_0, \theta_0)]^2}{a_l^{(d)}(\theta_0, \theta_0)} |H_L^l(q_0)|^2. \quad (9)$$

Thus we have a proposition

Proposition 1: In the Euclidean case, using a extrapolator of the form (3), when we have observations on one sphere with center at origin, the extrapolation error is given by the formula (9), and in particular, for $d = 2$, it depends only on distance from origin.

For the case of $d = 2$, the expression (9) becomes as

$$\delta_1^2(z) = F(+\infty) - \sum_{l=0}^{\infty} (a_l^{(2)}(\theta_0, \theta_1))^2 / a_l^{(2)}(\theta_1, \theta_1).$$

Finally, we consider extrapolation of origin. In this case,

$$\begin{aligned} R(p(z, z_j)) &= R(\theta_j) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L \gamma_j^{(d)}(z; l, L) H_L^l(q_j), \\ \text{so that } \gamma_j^{(d)}(z; l, L) &= \delta(l) \delta(L) R(\theta_j) \text{ and} \\ \delta_n(z) &= F(+\infty) - P^{(d)}(\frac{d}{2}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_0^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \overline{\hat{c}^{(i)}(z; 0)} \hat{c}^{(j)}(z; 0) \end{aligned} \quad (10)$$

, in particular when $n = 1$, we have

$$\delta_1^2(z) = F(+\infty) - \frac{1}{2^{d-2}} \frac{[P^{(d)}(\frac{d}{2}) \sum_0^{\infty} \frac{J_{d-2}(q_0)}{(\frac{d}{2})^{\frac{d-2}{2}}} df(q)]^2}{\sum_0^{\infty} [P^{(d)}(\frac{d}{2}) \frac{J_{d-2}(q_0)}{(\frac{d}{2})^{\frac{d-2}{2}}} df(q)]^2}.$$

In the latter case, using Cauchy-Schwarz inequality, we get a lower

bound of error, $\delta_1^2(z) \geq F(+\infty)(1 - 1/2^{d-2})$, and the lower bound is attained iff the spectral distribution function $F(\nu)$ jumps at

ν -values such that $\Gamma(\frac{d}{2}) \frac{J_{\frac{d-1}{2}}(\nu)}{(\frac{\nu}{2})^{\frac{d-1}{2}}} = C$, $0 < C \leq 1$.

§2. Spherical space

In this case, our coefficients $c^{(i)}(z; \theta)$ have a Fourier expansion

(4) and corresponding to (6) we have

$$R(p(z_i, z_j)) = \frac{2^{d-2}}{\pi} \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^{d-2} a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \frac{J_l(\theta_i)}{l^{d/2}} \frac{J_l(\theta_j)}{l^{d/2}},$$

where $a_l^{(d)} = \sum_{\nu=l}^{\infty} w(\nu) \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{2^{2\nu+d-2} (\nu-2)! \Gamma(\frac{d-1}{2}+1)}{\Gamma(\nu+d-1) \Gamma(\nu+l+d-1)}$

$$C_{\nu-l}^{(d-1)/2+l}(\cos \theta_i) \sin^l(\theta_i) C_{\nu-l}^{(d-1)/2+l}(\cos \theta_j) \sin^l(\theta_j) \quad (11)$$

and corresponding to (7) we have

$$R(p(z, z_j)) = \frac{2^{d-2}}{\pi} \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^{d-2} \sum_{i=1}^n a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \hat{c}^{(i)}(z; L) \frac{J_l(\theta_j)}{l^{d/2}} \quad (12)$$

Also corresponding to (8),

$$\|\hat{X}_n(z)\|^2 = \frac{2^{d-2}}{\pi} \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^{d-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \hat{c}^{(i)}(z; L) \hat{c}^{(j)}(z; L) \quad (13)$$

and we have

$$\delta_1^2(z) = R(0) - \frac{2^{d-2}}{\pi} \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^{d-2} \frac{|a_l^{(d)}(\theta_0, \theta_0)|^2}{|a_l^{(d)}(\theta_0, \theta_0)|} \frac{|J_l(\theta_0)|^2}{|J_l(\theta_0)|^2} \quad (13)$$

Thus we get a proposition

Proposition 2: In the spherical case, using a extrapolator of the form (3), when we have observations on one sphere with center at origin(north pole), the extrapolation error is given by the formula (13), and in particular, for $d = 2$, it depends only on distance from origin.

For the case of $d = 2$, the formula (13) becomes as

$$\delta_1^2(z) = R(0) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=\nu}^{\infty} w(\nu) (-1)^l \frac{(\nu-2)!}{(\nu+2)!} \frac{|a_{\nu}^{(2)}(\theta_0, \theta_0)|^2}{|a_{\nu}^{(2)}(\theta_0, \theta_0)|} \frac{|J_{\nu}(\theta_0)|^2}{|J_{\nu}(\theta_0)|^2}$$

We note that this proposition parallels proposition 1 in the Euclidean

case. But as seen in the following, a lower bound of error of extrapolation of origin with $n = 1$, differs.

Let an extrapolated point be the origin; then we have results

$$\|\hat{x}_n(z)\|^2 = \frac{2^{d-2}}{\pi} \sum_{i,j=1}^n a_0^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \hat{c}^{(i)}(z;0) \overline{\hat{c}^{(j)}(z;0)},$$

and

$$\delta_1^2(z) = R(0) - \frac{[P(d-1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{P(\nu+1)}{P(\nu+d-1)} C_{\nu}^{\frac{d-1}{2}}(\cos \theta_1) w(\nu)]^2}{\sum_{\nu=0}^{\infty} [P(d-1) \frac{P(\nu+1)}{P(\nu+d-1)} C_{\nu}^{\frac{d-1}{2}}(\cos \theta_1)]^2 w(\nu)}.$$

Thus in the spherical case, error function $\delta_1^2(z)$, z is the origin, has lower bound 0 and this lower bound is attained iff spectrum distributes on ν -values such that $\frac{P(d-1)P(\nu+1)}{P(\nu+d-1)} C_{\nu}^{\frac{d-1}{2}}(\cos \theta_1) = C$, $0 < C \leq 1$.

References

- (1) U.D. Popov (1968), "On Some Problems of The Linear Extrapolation For Homogeneous And Isotropic Random Fields Which Are Observed On The Circles," Mat.Zam., 4, pp.589-598 (in Russian).
- (2) E. Wong (1969), "Homogeneous Gauss-Markov Random Fields," Ann.Math.Stat., 40, pp.1625-1634.
- (3) N.J. Vilenkin (1968), Special Functions and the Theory of Group Representations, Translations of Mathematical Monographs, vol.22, AMS.

This list is not complete one; more complete list is contained in I.Kubo or in S.Panchev. Wong's paper and Popov's paper is not contained, and also Yadrenko's several previous papers are not contained.

1956:

K.Ito: Isotropic Random Currents, 3-rd Berkeley Symp.,

Vol.2, pp.125-132.

P.Levy: A Special Problem of Brownian Motion, and a General

Theory of Gaussian Random Function, 3-rd Berkeley

Symp., Vol.2, pp.133-175.

1957:

A.M.Yaglom: Some Classes of Random Fields in n-dimensional

Space Related to Stationary Random Process,

Theory of Prob. and Appl., 2, pp.273-320.

N.N.Chentsov: Levy Brownian Motion for Several Parameters

and Generalized White Noise, Theory of Prob.

and Appl., 2, pp.265-266.

1961:

A.M.Yaglom: Second-order Homogeneous Random Fields, 4-th

Berkeley Symp., Vol.2, pp.593-620.

1962:

Urbanik: Generalized Stationary Processes of Markovian
Character, Stud.Math, 21.

M.I.Fortus: Formulas for Extrapolation of Random Fields,
Theory of Prob. and Appl.,7.pp.101-108.

1963:

McKean: Brownian Motion with a Several Dimensional Time,
Theory of Prob. and Appl.,8.pp.335

1965:

A.M.Yaglom: Outline of Some Topics in Linear Extrapolation
of Stationary Random Processes, 5-th Berkeley
Symp.. Vol.2,Part1,pp.259-278.

A.S.Monin and A.M.Yaglom: Statistical Hydrodynamics,Part 1,
NAUKA, Moscow(English trans.
from MIT Press)

1967:

I.Kubo: Kakurituba no Wadai, Seminar on Prob. Vol.26
(in Japanese)

A.S.Monin and A.M.Yaglom: Statistical Hydrodynamics,Part 2
, NAUKA, Moscow.

1968:

M.M.Rao: Local Functionals and Generalized Random Fields,
Bull.Amer.Math.Soc.,74,pp.288-293.

1969:

M.M.Rao: Representation Theory of Multidimensional Generalized Random Fields, Proc. 2nd International Symp. Multivariate Analysis, pp.411-436.

1971:

G.M.Molchan: Characterization of Gaussian Fields with Markov Property, D.A.N., 197.

O.I.Orebkova: Some Problems of Extrapolation of Random Fields, D.A.N., 196.

M.I.Yadrenko: Isotropic Random Field with Markov Property, Theory of Prob. and Math.Stat., 5, pp.128-137.

M.M.Rao: Local Functionals and Generalized Random Fields with Independent Values, Theory of Prob. and Appl., 16, pp.466-483.

S.Panchev: Random Functions and Turbulence, Pergamon.

Preprint:

L.D.Pitt: A Markov Property for Gaussian Processes with Multidimensional Parameter. Arch. Rat. Mech. Analysis, 17 (1971), 367-391.